Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 13

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wie sieht der Limes des Diagrammes

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

in Set konkret aus?

Aufgabe 2 (5 Punkte):
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass Produkte und Koprodukte gewisse Limiten bzw. Kolimiten sind. Dabei haben wir eine Indexkategorie $\mathcal{I}$ mit genau zwei Objekten und nur den Identitätsmorphismen verwendet.

(i) Wie sollte die Indexkategorie $\mathcal{I}$ von beliebigen Produkten und Koprodukten aussehen?

(ii) Im Spezialfall einer leeren Indexkategorie nennt man das Produkt auch terminales Objekt und das Koprodukt auch initiales Objekt. Formulieren Sie diese beiden Definitionen aus (wie bei unserer Definition von binären Produkten und Koprodukten als wir Limiten und Kolimiten noch nicht zur Verfügung hatten).

(iii) Ist ein Objekt sowohl initial als auch terminal, so nennt man es Nullobjekt. Gibt es initiale, terminale oder Nullobjekte in den Kategorien Set, Grp, Ab, Top und Ring (kommutativ mit 1)?

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Konstruieren Sie einen Linksadjungierten zum Vergissfunktor $U\colon \text{Ab} \to \text{Set}$. Hat er einen Rechtsadjungierten?

Tipp: Verwenden Sie für den zweiten Teil den Kommentar am Ende der nächsten Aufgabe.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass Rechtsadjungierte Limiten erhalten: Ist $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Rechtsadjungierter Funktor (mit Linksadjungiertem $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) und $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{D}$ ein Diagramm in $\mathcal{D}$ dessen Limes $(\lim(D) \xrightarrow{p_i} D(i))_{i\in\mathcal{I}}$ existiert, so ist $G(\lim(D)) \cong \lim(G \circ D)$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass $(G(\lim(D)) \xrightarrow{G(p_i)} G(D(i)))_{i\in\mathcal{I}}$ ein Kegel über $G \circ D$ ist.

(ii) Sei nun $(C \to G(D(i)))_{i\in\mathcal{I}}$ ein beliebiger Kegel über $G\circ D$. Zeigen Sie, dass die Adjunktion einen Kegel über D liefert.

bitte wenden

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 13

(iii) Folgern Sie, dass es einen eindeutigen Morphismus

$$(F(C) \to D(i))_{i\in\mathcal{I}} \to (\lim(D) \xrightarrow{p_i} D(i))_{i\in\mathcal{I}}$$

von Kegeln über D gibt und dass dieser vermöge der Adjunktion den gesuchten eindeutigen Morphismus

$$(C \to G(D(i)))_{i\in\mathcal{I}} \to (G(\lim(D)) \xrightarrow{G(p_i)} G(D(i)))_{i\in\mathcal{I}}$$

von Kegeln liefert.

Analog kann man zeigen, dass Linksadjungierte Kolimiten erhalten.